Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

11. November 2025

Zone A Vormittag | **Zone B** Vormittag | **Zone C** Vormittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antwortheft ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

8825 – 7177

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

(a) Zeigen Sie, dass $3\cos 2x + 11\sin x = 3 + 11\sin x - 6\sin^2 x$. [2]

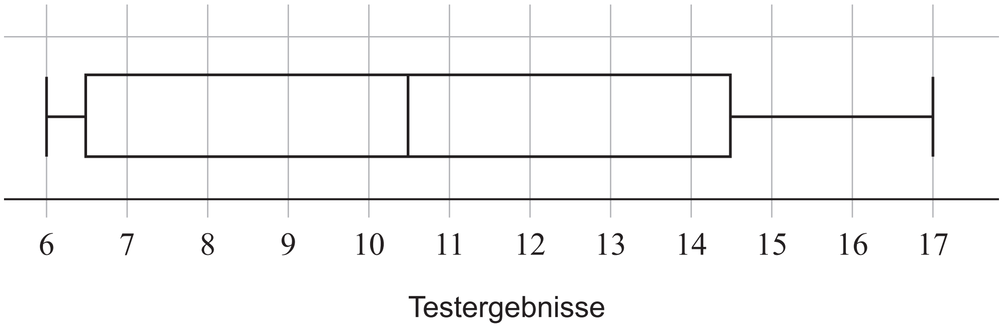
(b) Lösen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode die Gleichung $3\cos 2x + 11\sin x - 6 = 0$ für $0° \leq x \leq 180°$. [3]

2. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine Lehrerin führte in ihrer Klasse mit 30 Schülern einen Test durch.

Aiden und Brett waren am Tag des Tests abwesend.

Das folgende Box- und Whisker-Diagramm zeigt die Ergebnisse der 28 Schüler, die am Tag des Tests an ihm teilgenommen haben.



Aiden und Brett führten den Test nach ihrer Rückkehr in die Schule durch.

Aiden erzielte weniger als 6 Punkte.

Brett erzielte mehr als 17 Punkte.

(a) Erläutern Sie kurz, warum der Medianwert für alle 30 Schüler noch immer $10{,}5$ beträgt. [1]

Die durchschnittliche Punktzahl der 28 Schüler betrug $10{,}5$.

Der Durchschnittswert für alle 30 Schüler beträgt jetzt $10{,}6$.

Die Streubreite der Punktzahlen für alle 30 Schüler beträgt 14 .

(b) Bestimmen Sie die Punktzahlen von Aiden und Brett. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Maximale Punktzahl: 6]

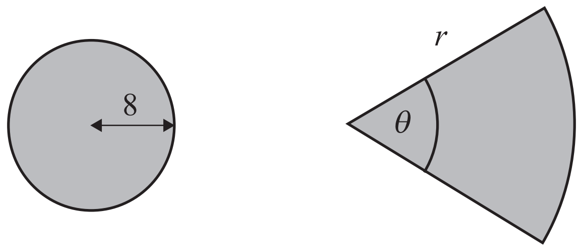
Betrachten Sie einen Kreis und einen Kreisausschnitt.

Der Radius des Kreises beträgt 8 mm.

Der Radius des Ausschnitts ist $r\text{ mm}$, und der spitze Mittelpunktswinkel ist θ (im Bogenmaß).

Dies ist im folgenden Diagramm dargestellt.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Der Umfang des Kreisausschnitts beträgt das $1{,}5$-fache des Kreisumfangs.

(a) Zeigen Sie, dass $r = \dfrac{24\pi}{2+\theta}$. [3]

Es gilt, dass die Flächeninhalte des Kreises und des Kreisausschnitts gleich groß sind.

(b) Bestimmen Sie den Wert von θ. [3]

4. [Maximale Punktzahl: 7]

Ein Gartencenter verkauft Samen für die beiden Sonnenblumensorten: groß und riesig.

Die Werte der Wachstumshöhe der großen Sonnenblumen sind normalverteilt mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ.

Es ist bekannt, dass $25\,\%$ der großen Sonnenblumen eine Höhe von über 180 cm erreichen.

(a) Es gelte $\mu + A\sigma = 180$, mit $A \in \mathbb{R}$. Finden Sie den Wert von A. [3]

Die Werte der Wachstumshöhe der riesigen Sonnenblumen sind ebenfalls normalverteilt.

Die durchschnittliche Höhe der riesigen Sonnenblumen ist 35 cm größer, und ihre Standardabweichung ist doppelt so groß wie die der großen Sonnenblumen.

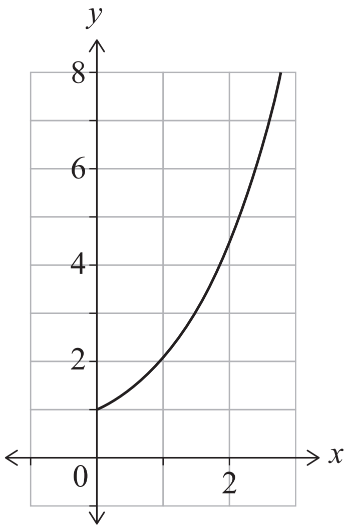
Es ist bekannt, dass $98\,\%$ der riesigen Sonnenblumen eine Höhe von mehr als 180 cm erreichen.

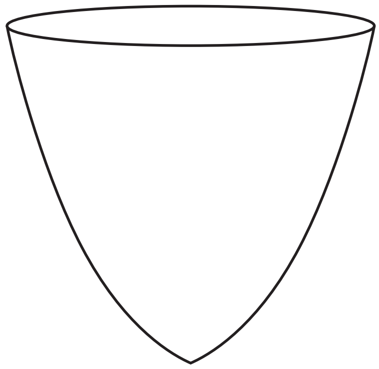
(b) Bestimmen Sie μ und σ. [4]

5. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$, mit $x \geq 0$.

Der durch die Kurve $y = f(x)$, die Gerade $y = 8$ und die y-Achse begrenzte Bereich wird um 2π (im Bogenmaß) um die y-Achse gedreht und bildet dadurch einen Rotationskörper.
Dies ist in den folgenden Diagrammen dargestellt.





Finden Sie das Volumen dieses Körpers.

6. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie das quadratische Polynom $P(x) = 2x^2 + qx + r$ mit $q, r \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung $P(x) = 0$ besitzt die Lösungen α und β, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bei Division von $P(x)$ durch $(x + 1)$ beträgt der Rest 12.

Es gilt: $\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{37}{4}$. Finden Sie die Werte von q und r.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Maximale Punktzahl: 6]

Betrachten Sie die folgenden zwei Gleichungen.

$$2x + 6y - 8z = 13$$

$$3x - y + 3z = 12$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und geben Sie die Antwort in Parameterform an. [2]

Betrachten Sie eine dritte Gleichung $ax + 12y - 16z = k$, mit $a, k \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie für den Fall $a = 3$ und $k = -3$ die eindeutige Lösung dieses Systems aus drei Gleichungen. [2]

(c) (i) Notieren Sie den Wert von a, für den das System dieser drei Gleichungen keine eindeutige Lösung besitzt.

(ii) Notieren Sie unter Nutzung der Vorarbeit den entsprechenden Wert von k, für den das System der drei Gleichungen eine unendliche Anzahl von Lösungen besitzt. [2]

8. [Maximale Punktzahl: 7]

Malik besitzt 15 Kochbücher, die er auf Reisen gekauft hat.

(a) Finden Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, wie die Bücher in einer Reihe in einem Regal angeordnet werden können. [1]

Maliks Bücher wurden auf drei verschiedenen Kontinenten gekauft.

Sechs Bücher stammen aus Asien, fünf aus Europa und vier aus Afrika.

Malik beschließt, die Bücher auf dem Regal so anzuordnen, dass die Bücher von jedem Kontinent in einer Gruppe stehen.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, wie Malik dies durchführen kann. [3]

Malik wählt vier Bücher aus, die alle vom selben Kontinent stammen.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die Malik dafür zur Verfügung stehen. [3]

9. [Maximale Punktzahl: 5]

Beweisen Sie durch Widerspruch, dass $\sqrt{2xy} \le \frac{1}{2}(2x + y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

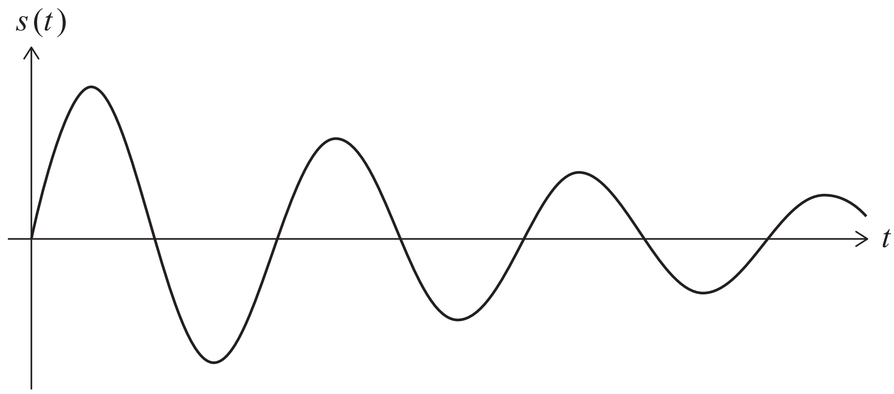
Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 17]

Ein Teilchen P bewegt sich auf einer geraden Linie so, dass für seine Auslenkung $s\,\text{cm}$, von einem festen Punkt O zur Zeit t Sekunden gilt: $s(t) = 2^{\left(1-\frac{t}{5}\right)}\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$, mit $t \geq 0$.

Das folgende Diagramm zeigt einen Teil des Graphen von $y = s(t)$.



(a) Finden Sie

(i) die größte Auslenkung des Teilchens P von O;

(ii) die maximale Geschwindigkeit des Teilchens P. [5]

(b) Finden Sie

(i) den Minimalwert der Auslenkungsfunktion $s(t)$;

(ii) die Auslenkung des Teilchens P von O für $t = 3{,}5$. [3]

(c) Bestimmen Sie unter Nutzung der Vorarbeit die von P in den ersten $3{,}5$ Sekunden zurücklegte **Gesamtstrecke**. [3]

$t = T$ sei der Zeitpunkt, an dem P zum ersten Mal zu O zurückkehrt.

(d) Notieren Sie den Wert von T. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 10)

Das Teilchen durchläuft O alle T Sekunden.

Es wird eine Folge $u_1, u_2, u_3 \ldots$ gebildet, wobei $u_1, u_2, u_3 \ldots$ die größten **Entfernungen** von O in jedem der Intervalle $0 < t < T$, $T < t < 2T$, $2T < t < 3T \ldots$ bezeichnen.

Es ist bekannt, dass $u_1, u_2, u_3 \ldots$ eine geometrische Folge bilden.

(e) (i) Bestimmen Sie den Wert des gemeinsamen Verhältnisses r dieser geometrischen Folge.

(ii) Berechnen Sie die vom Teilchen zurückgelegte **Gesamtstrecke**, wenn es sich unendlich lange so weiterbewegen würde. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 17]

Die Länge der Sprünge bei einem Weitsprungwettbewerb (in Metern) kann durch eine stetige Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f modelliert werden, die wie folgt definiert ist:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ a(x-3)^3 + b(x-3)^2, & 3 \le x \le 9 \\ 0, & x > 9 \end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, das $324a + 72b = 1$ ist. [4]

Es gilt: $f(9) = 0$.

(b) (i) Zeigen Sie, dass gilt: $6a + b = 0$.

(ii) Bestimmen Sie die Werte von a und b. [4]

(c) Zeigen Sie, dass der Median von X kleiner ist als der Modalwert von X. [5]

Matt springt beim Wettbewerb als letzter. Er muss mindestens $8{,}52\ \mathrm{m}$ springen um zu gewinnen.

(d) Finden Sie mit Hilfe dieser Modellierung und unter der Annahme, dass er über $8\ \mathrm{m}$ weit springt, die Wahrscheinlichkeit, dass er den Wettbewerb gewinnt. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 22]

Betrachten Sie die folgende homogene Differentialgleichung

$$\left(x^2 + xy\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + xy - 3y^2 \text{ mit } x > 0 \text{ und } y > \frac{x}{2}.$$

Es gilt: $y = \frac{3}{2}$ wenn $x = 1$.

(a) (i) Finden Sie den Wert von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ wenn $x = 1$.

(ii) Schätzen Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit zwei Schritten den Wert von y für $x = 1{,}4$.

(iii) Geben Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Konkavität der Lösungskurve für $1 \le x \le 1{,}4$ an. Sie können davon ausgehen, dass sich die Konkavität in diesem Intervall nicht ändert. Begründen Sie Ihre Antwort. [6]

(b) (i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left(x^2 + xy\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2x + y - x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - (x + 7y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

(ii) Finden Sie den Wert von $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ wenn $x = 1$. [6]

(c) Bestimmen Sie die Konstanten A, $B \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{1+v}{1-4v^2} \equiv \frac{A}{1-2v} + \frac{B}{1+2v}$. [2]

(d) Zeigen Sie durch Lösen der Differentialgleichung $\left(x^2 + xy\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + xy - 3y^2$ mit $x > 0$, $y > \frac{x}{2}$ und $y = \frac{3}{2}$ für $x = 1$, dass gilt: $x^6(2y - x)^3 = 2(x + 2y)$. [8]

Disclaimer: